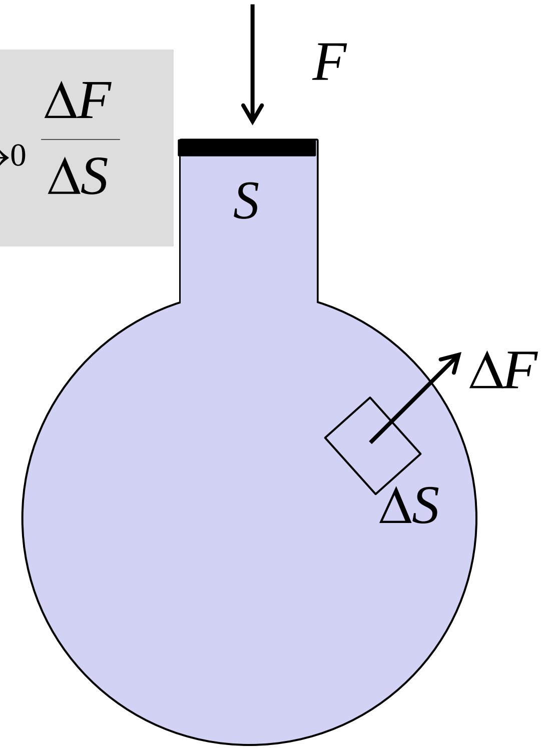
Opakování - Mechanika tekutin – Rovnováha, Hydrostatika

• **Tekutiny** – společné označení pro kapaliny a plyny.

• Tlak: $p = \dfrac{F}{S}$ $\quad [\mathrm{Pa}] = \left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• **Dokonalá tekutina** – spojitě rozprostřená látka, pro kterou v každém bodě platí :

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p, \quad \sigma_{ij} = 0 \ pro\ i \neq j$$

$$p \geq 0$$

• **Smyková napětí** jsou v dokonalé tekutině vždy **nulová**, modul pružnosti ve smyku je nulový G=0. Dokonalá tekutina se nebrání změně tvaru.

• V ideální tekutině **nelze realizovat tahová napětí**.

• **Dokonalá kapalina** je **nestlačitelná**: $\rho(\vec{r}) = konst, \quad p \geq 0$

• Jelikož se objem dokonalé kapaliny nemění, je první invariant tenzoru deformace nulový:

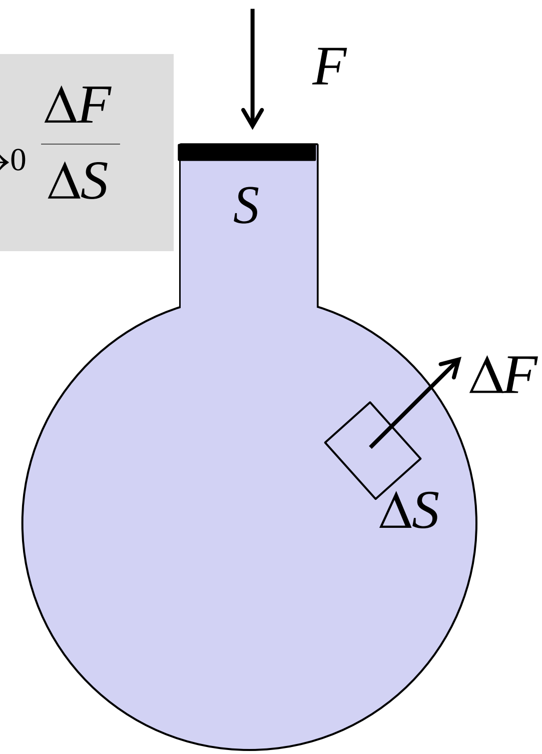
$$V = abc \doteq a_0 b_0 c_0 + a_0 b_0 c_0 \left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = V_0 + V_0 \varepsilon_I \Rightarrow \varepsilon_I = \frac{V - V_0}{V_0} = 0$$

Opakování - Mechanika tekutin - Rovnováha

• **Dokonalý plyn** je stlačitelný, známe-li stavovou rovnici plynu (např. pro ideální plyn $pV/T = nR = nN_A k_B = konst.$), můžeme určit hustotu plynu jako funkci tlaku v daném místě:

$$\rho = \rho\left(p(\vec{r})\right)$$

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• I pro tekutiny platí rovnice rovnováhy kontinua:

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial i} + G_i = 0, \quad i = x, y, z$$

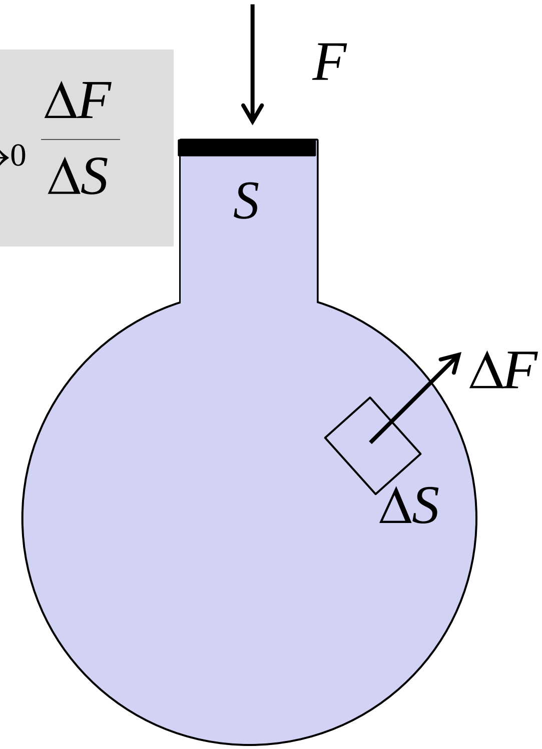
$$\nabla p \equiv \mathrm{grad}\left(p\right) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right) = \vec{G}$$

• U kapalin je hustota konstantní a objemové síly můžeme stanovit před řešením rovnice rovnováhy.
• U plynů ale závisí hustota na tlaku a je výhodnější do rovnice zavést intenzitu silového pole, hovoříme potom o **rovnici hydrostatické rovnováhy** :

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{V\vec{G}}{m} = \frac{\vec{G}}{\rho(p)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho(p)}\mathrm{grad}(p) = \vec{I}, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad i = x, y, z$$

Opakování - Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$



• Pro kapalinu (ρ=konst.) jsou parciální derivace tlaku nezávislé na tlaku. Objemovými silami je tedy rozložení tlaku (řešení rovnice) v kapalině určeno až na aditivní konstantu: $f(\vec{r}), \quad p(\vec{r}) = f(\vec{r}) + k$

Okrajové podmínky (určení jedné konstanty) se redukují na znalost tlaku v libovolném jednom bodě kapaliny. Změníme-li v tomto bodě tlak, změní se o stejnou hodnotu i konstanta *k* a tím i tlak libovolném bodě kapaliny.

$$p(\vec{r}_0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0)$$

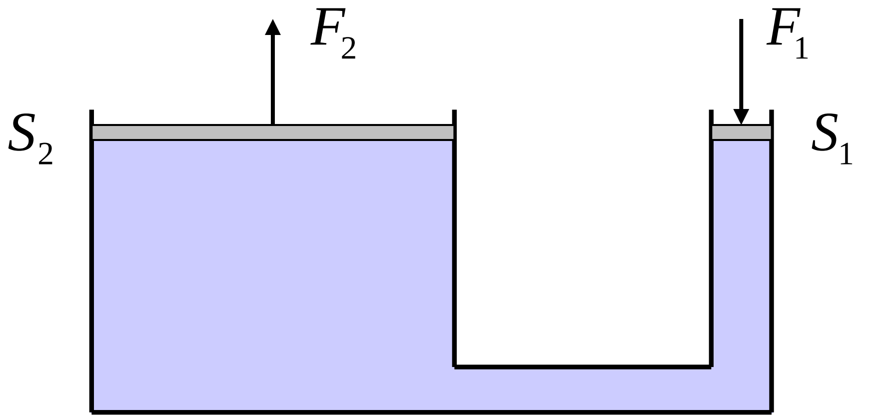
$$p(\vec{r}_0) = p_0 + \Delta p \quad \Rightarrow \quad p_0 + \Delta p = f(\vec{r}_0) + k \quad \Rightarrow \quad k = p_0 - f(\vec{r}_0) + \Delta p$$

•**Pascalův zákon: „**Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny, pokud je před změnou i po změně kapalina v rovnováze.“

Opakování - Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon

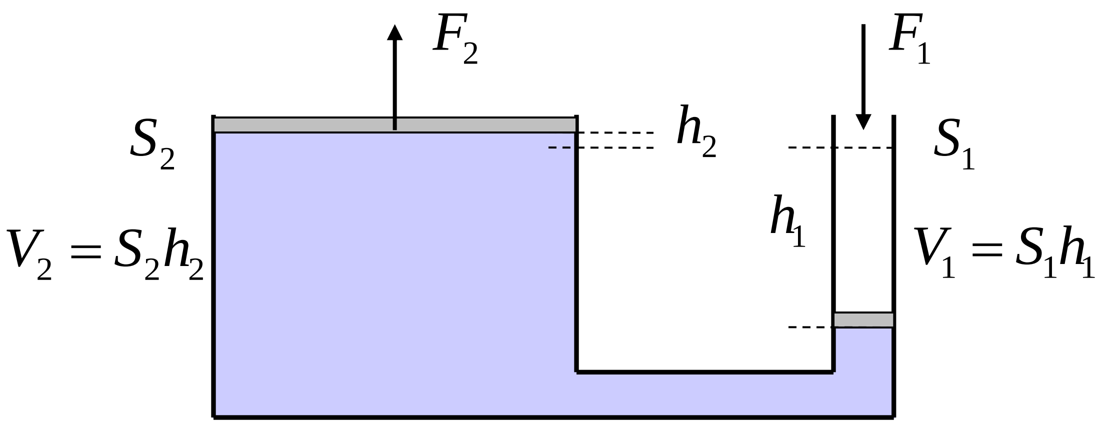
- Hydraulický lis, můžeme zanedbat objemové síly:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = konst.$$

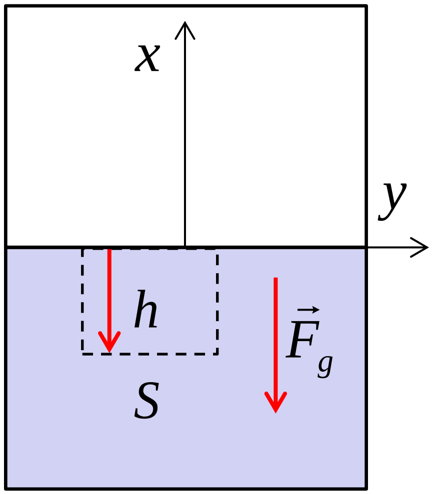


$$p_1 = \frac{F_1}{S_1} = p_2 = \frac{F_2}{S_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

- Práce: $V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 h_1 = S_2 h_2 \quad \Rightarrow \quad F_1 h_1 = F_2 h_2$



Opakování - Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



- Tekutina v tíhovém poli $F_x = -mg$
- Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = \frac{F_x}{m} = -g, \quad I_y = 0, \quad I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

- Pro dokonalou (nestlačitelnou) kapalinu je ρ = konst. Dostaneme tedy pro **hydrostatický tlak**:

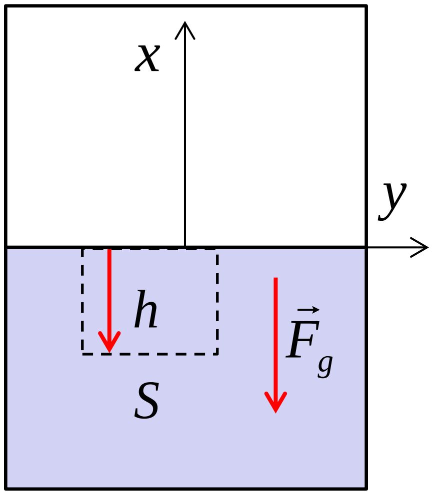
$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\rho\, g \quad \Rightarrow \quad p(x) = -\rho g x + k$$

- Na hladinu *x* = -*h* = 0 nám působí pouze barometrický tlak *b*:

$$p(0) = b = -\rho g 0 + k \quad \Rightarrow p(h) = h\rho g + b$$

$$\Delta p = p(h) - p(0) = h\rho g$$

Opakování - Mechanika tekutin – Rovnováha – Pascalův zákon



- Tekutina v tíhovém poli
- Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy :

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial i} = I_i, \quad I_x = -g, I_y = 0, I_z = 0$$

$$\frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = -g, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{\rho(p)}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

- Tlak nezávisí tedy na souřadnicích *y* a *z*.

- Závislost tlaku plynu na výšce v tíhovém poli lze určit pokud známe stavovou rovnici plynu:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}N_A k_B T, \quad \frac{N_A k_B T}{M} = C \quad \Rightarrow \rho(p) = \frac{m}{V} = \frac{p}{C} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{C}p$$

$$p(x) = Ae^{\alpha x} \quad \Rightarrow A\alpha e^{\alpha x} + A\frac{g}{C}e^{\alpha x} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{g}{C} \quad \Rightarrow p(x) = Ae^{-\frac{g}{C}x}$$

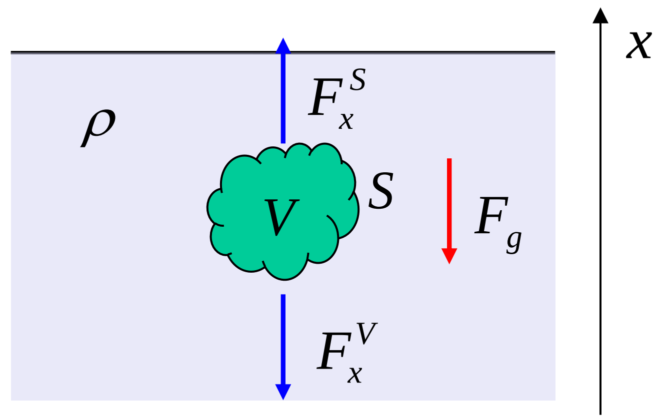
- U hladiny moře $x = 0$ nám působí tlak p_0 a hustota ρ_0. Pro **barometrickou rovnici** dostáváme:

$$p(0) = p_0 = Ae^0, \quad \frac{1}{C} = \frac{\rho_0}{p_0} \quad \Rightarrow p(x) = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0}gx}, \quad kde \quad p_0 \doteq 10^5\,\mathrm{Pa}, \rho_0 \doteq 1{,}2\ \mathrm{kgm}^{-3}$$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon

• V rovnováze musí být součet výslednice objemových sil a výslednice plošných sil nulový:

$$\vec{F}^S + \vec{F}^V = 0 \quad \Rightarrow F_i^S = -F_i^V$$



• Složky výslednice objemových sil: $F_i^V = \int_V G_i \,\mathrm{d}V$

• Složky výslednice plošných sil: $F_i^S = \int_S \sigma_{vi} \,\mathrm{d}S$

• Je-li objemovou silou tíhová síla: $F_x^V = -g\int_V \rho \,\mathrm{d}V, \quad F_y^V = 0, \quad F_z^V = 0$

• Potom je **vztlaková síla**: $F_x^S = g\int_V \rho \,\mathrm{d}V, \quad F_y^S = 0, \quad F_z^S = 0$

• **Archimédův zákon:**

Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze tekutiny tělesem vytlačené.

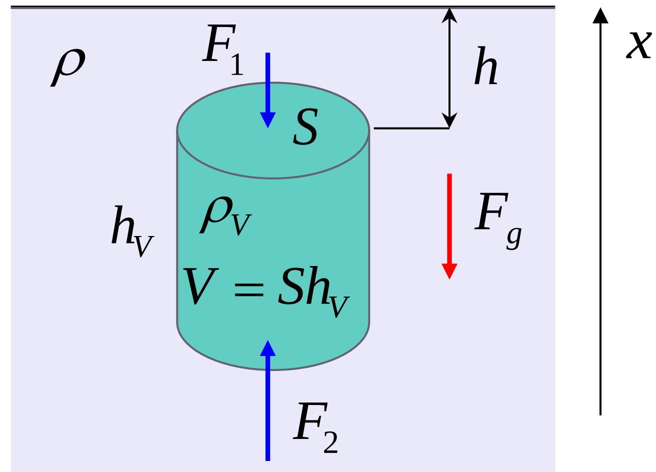
Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon

• Hydrostatický tlak nezávisí na souřadnicích *y* a *z*, síly působící na válcovou plochu se tedy vykompenzují.

• plošné síly působí tedy jenom na podstavy válce:

$$F_1 = p_1 S = h\rho g S$$

$$F_2 = p_2 S = (h + h_V)\rho g S$$

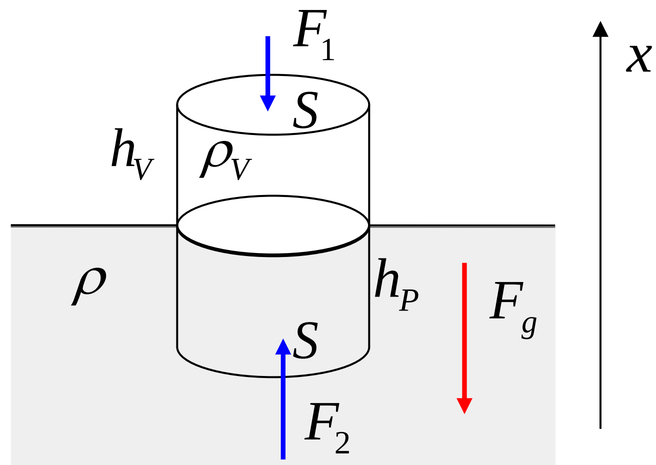


• Vztlaková síla:

$$F_2 - F_1 = (h + h_V)\rho g S - h\rho g S = h_V \rho g S = \rho V g$$

tíha tekutiny
vytlačené tělesem

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon



- rovnováha $F_2 - F_1 - F_g = 0$

- plošné síly působí jenom na podstavy válce:

$$F_1 = p_1 S = 0$$

$$F_2 = p_2 S = h_P \rho g S$$

- Vztlaková síla: $F_2 - F_1 = h_P \rho g S$
- Tíha tělesa: $F_g = \rho_V h_V S g$

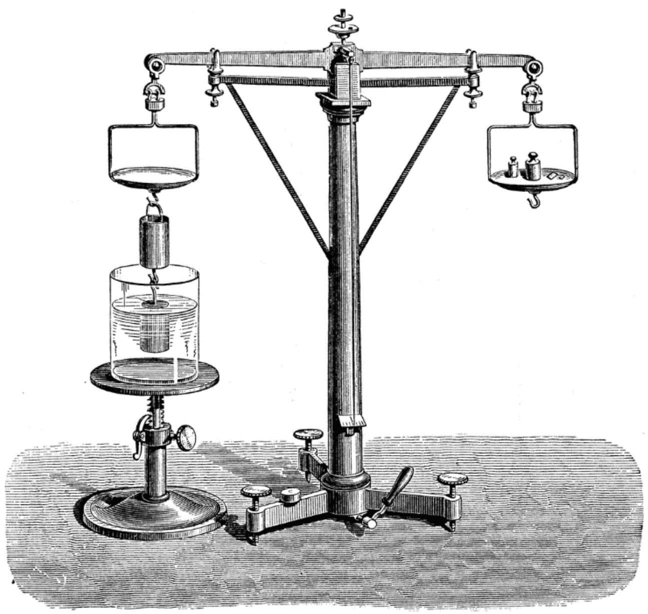
- Z podmínky rovnováhy dostaneme: $F_2 - F_1 - F_g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_V h_V = \rho h_P$

- podmínka plavání: $h_P \leq h_V \quad \Rightarrow \quad \rho_V \leq \rho$

Mechanika tekutin – Rovnováha – Archimédův zákon – měření hustoty

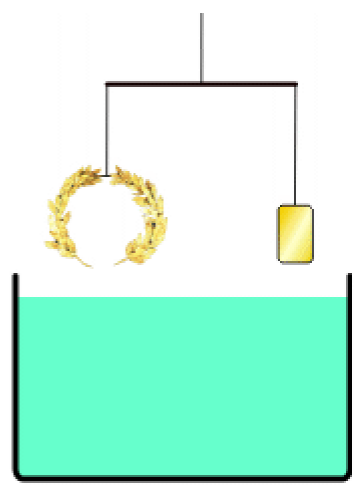
- vážení na vzduchu: $m_1 g = \rho_T V g$ $\qquad m_1 = \rho_T V \quad \Rightarrow V = \dfrac{m_1}{\rho_T}$

- vážení ve vodě: $m_2 g = m_1 g - F_{\mathrm{vztlak}} = \rho_T V g - \rho V g$ $\qquad m_2 = \rho_T V - \rho V$



$$m_2 = \rho_T \frac{m_1}{\rho_T} - \rho \frac{m_1}{\rho_T} \quad \Rightarrow$$

$$\rho_T = \frac{m_1}{m_1 - m_2} \rho$$

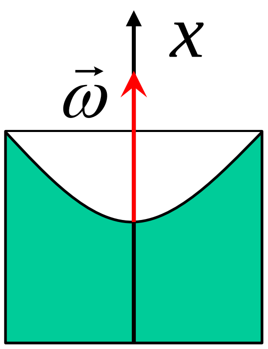


- Archimédes, Syrakusy (287-212 př. n.l.)

$$\rho_{Au} = 19.3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

$$\rho_{Ag} = 10.49\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$$

Mechanika tekutin – Rotující kapalina



• Rovnici hydrostatické rovnováhy užijeme pro sledování rovnováhy kapaliny za působení dalších objemových sil.
• Zvolíme soustavu souřadnou pevně spjatou s kapalinou.
• Jediná pravá síla je objemová tíhová síla:

$$G_x^g = -\rho g, \quad G_y^g = 0, \quad G_z^g = 0,$$

• Zdánlivá objemová odstředivá síla je dána složkami:

$$G_x^O = 0, \quad G_y^O = \rho\omega^2 y, \quad G_z^O = \rho\omega^2 z$$

• Rovnice hydrostatické rovnováhy dostaneme tedy ve tvaru:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\omega^2 z$$

• Z první rovnice dostaneme řešení ve tvaru: $p = -\rho g x + f_1(y,z)$

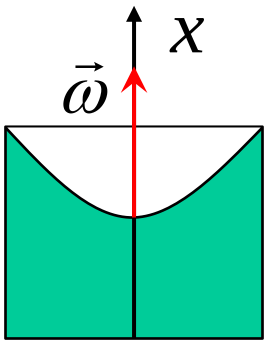
• Dosadíme do druhé rovnice a pro funkci f_1 dostaneme podmínku:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \rho\omega^2 y \quad \Rightarrow f_1(y,z) = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + f_2(z)$$

• Dosadíme do třetí rovnice a pro funkci f_2 dostaneme podmínku:

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \rho\omega^2 z \quad \Rightarrow f_2(z) = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 z^2 + k$$

Mechanika tekutin – Rotující kapalina



• Pro rozložení tlaku v rotující kapalině dostaneme tedy ve výsledku:

$$p = -\rho g x + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2(y^2 + z^2) + k$$

• Plochy, ve kterých kapalina nabývá stejného tlaku $p=K$ jsou rotační paraboloidy:

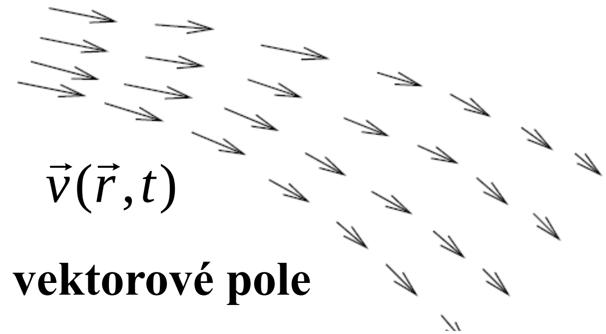
$$x = \tfrac{1}{2}\rho\frac{\omega^2}{g}(y^2 + z^2) + \frac{k-K}{\rho g}$$

• Jednotlivé plochy se liší konstantou: $\dfrac{k-K}{\rho g}$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika

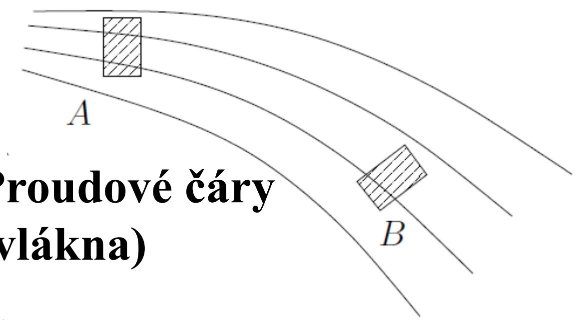
• Pohyb tekutiny vyšetřujeme vzhledem k soustavě souřadnic, která je např. pevně spojená s potrubím. Vzhledem k této soustavě má každá částice tekutiny rychlost:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$



vektorové pole

• Takto znázorněné vektory jsou tečnami ke křivkám, které nazýváme **proudnice**, nebo **proudové čáry**. Není-li proudění ustálené (stacionární), mění se obraz proudnic v každém okamžiku.



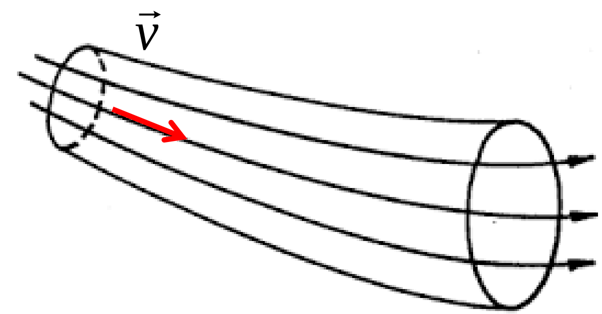
Proudové čáry (vlákna)

• Při **ustáleném proudění** se rychlost tekutiny v žádném místě nemění a

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$$

je statické vektorové pole.

• Při ustáleném proudění je tvar proudnic stejný a **proudnice** se shodují s **trajektoriemi** částic tekutiny hovoříme potom o **proudové trubici**.



• Říkáme, že **proudění je vířivé**, jestliže :

$$\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \neq 0$$

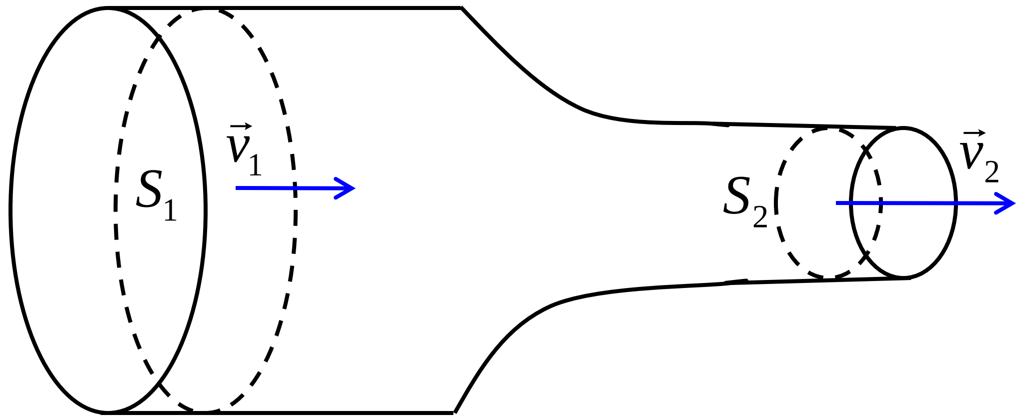
• Říkáme, že **proudění je nevířivé (potenciálové)**, jestliže :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \operatorname{grad} f, \quad v_i = \frac{\partial f}{\partial i} \quad kde \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity

• Hmotnost tekutiny, která proteče za čas Δt plochou S_1 a S_2 při stacionárním proudění je:

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t, \quad \Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$



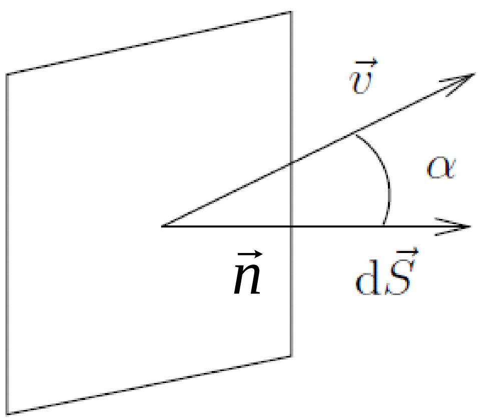
• Jelikož platí zákon zachování hmotnosti dostaneme:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \quad \Rightarrow \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Rovnici kontinuity pro stacionární proudění tekutiny trubicí.

• V případě **kapaliny** je **hustota konstantní** a rovnice kontinuity se zjednoduší:

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$



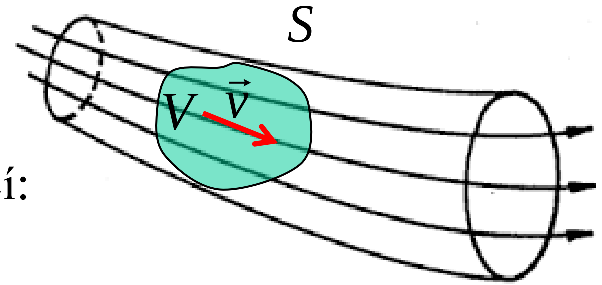
Hmotnostní (prů)tok definujeme: $Q_m \equiv \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \rho S v$

Objemový (prů)tok definujeme: $Q_v \equiv \dfrac{Q_m}{\rho} = S v$

Zavedeme orientovanou plochu dostaneme pro element hmotného toku:

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow dQ_m = \rho \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \rho v\,\mathrm{d}S \cos\alpha$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



• Zavedeme orientovanou plochu dostaneme pro element hmotnostního toku:

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\mathrm{d}S \quad \Rightarrow dQ_m = \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \rho v \mathrm{d}S\cos\alpha$$

• Celkový hmotnostní tok libovolnou plochou dostaneme integrací:

$$Q_m = \oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S \rho v\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

• Hmotnostní tok uzavřenou plochou směrem ven se pak musí rovnat úbytku tekutiny v objemu V za jednotku času :

$$m = \int_V \rho\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

• Dostáváme **rovnici kontinuity** v integrálním tvaru:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V$$

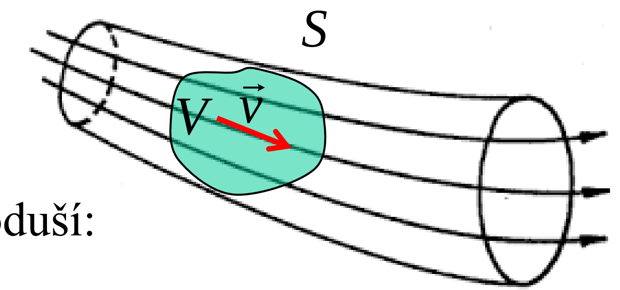
• Pro konečnou část prostoru V omezenou plochou S lze upravit pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V, \quad kde \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) \equiv \frac{\partial\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial\rho v_z}{\partial z}$$

• Dostáváme **rovnici kontinuity** v diferenciálním tvaru:

$$\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Rovnice kontinuity



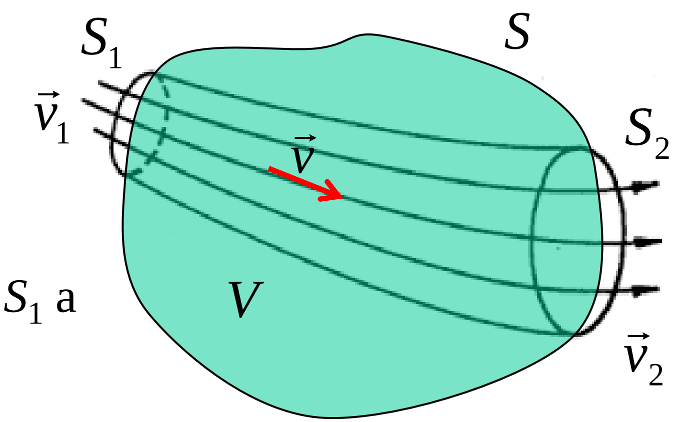
- **Rovnici kontinuity** v diferenciálním tvaru:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

- Pro **ustálené** proudění **nestlačitené kapaliny** se rovnice zjednoduší:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$



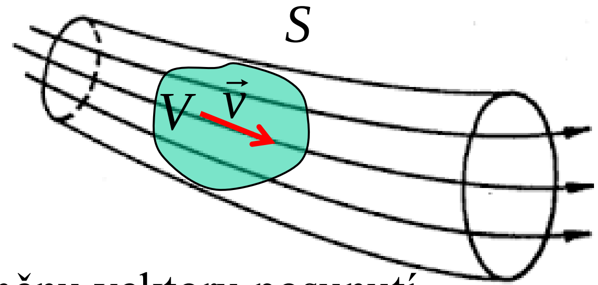
- do prostoru ohraničeného S vstupují částice tekutiny plochou S_1 a vystupují plochou S_2. Bude tedy:

$$\oint_S \rho\vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \rho\vec{v}_1\mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \rho\vec{v}_2\mathrm{d}\vec{S}_2 = -Q_{m1} + Q_{m2} = 0 \Rightarrow Q_m = konst$$

- Za ustáleného proudění je hmotnostní tok **tekutiny** libovolným průřezem proudové trubice konstantní. Jsou-li rychlost v a hustota ρ v celém průřezu konstantní, lze rovnici kontinuity psát v jednoduchém tvaru: $$Q_m = \rho S v = konst.$$

- Pro **nestlačitelnou kapalinu**: $$Q_V = S v = konst.$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Pohybová rovnice



• I pro tekutiny platí pohybová rovnice kontinua :

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = x, y, z$$

• Místo napětí dosadíme působící tlak na tekutinu a za časovou zněnu vektoru posunutí dosadíme rychlost proudící tekutiny a dostaneme **pohybovou rovnici proudící ideální tekutiny** :

$$\mathrm{grad}(p) + \vec{G} = \rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \quad -\frac{\partial p}{\partial i} + G_i = \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}, \quad i = x, y, z$$

$$\mathrm{grad}(p) \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}, \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}, \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right)$$

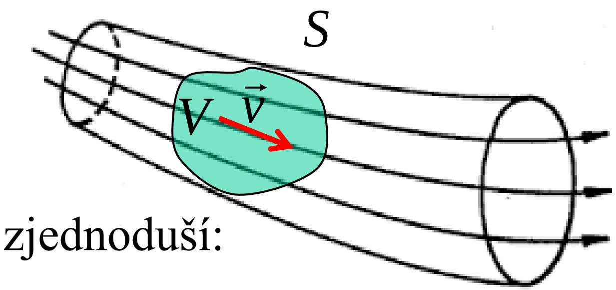
• Zavedeme-li intenzitu silového pole dostaneme **Eulerovu hydrodynamickou rovnici**:

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j}\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}, \qquad i = x, y, z$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial i}$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- **Eulerova hydrodynamická rovnice**:



$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}, \quad i = x, y, z$$

- Při stacionárním proudění není rychlost funkcí času, rovnice se zjednoduší:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i}, \quad i = x, y, z$$

- Rovnici vynásobíme jednotkovým vektorem ve směru rychlosti, který má směr proudnice a integrujeme ve podél proudnice:

$$\int \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \int I_i \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s + konst., \quad i = x, y, z$$

- Je-li pole objemových sil konzervativní:

$$I_i = \frac{\partial \varphi}{\partial i}, \quad \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \mathrm{d}i \quad \Rightarrow \quad \int I_i \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial i} \mathrm{d}i = -\int \mathrm{d}\varphi = \quad i = x, y, z$$

- Podobně:

$$\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial i} \mathrm{d}i = \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \quad i = x, y, z$$

Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

• Využijeme-li identitu, dostaneme:

$$\frac{\partial v^2}{\partial j} = \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial j} = 2v_i \frac{\partial v_i}{\partial j} \Rightarrow \int \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial v_i}{\partial j} v_j \frac{v_i}{v} \mathrm{d}s = \int \frac{\partial v^2/2}{\partial j} \mathrm{d}j = \int d\left(\frac{v^2}{2}\right), \quad i = x, y, z$$

• Cekem tedy dostaneme vyjádření pro **Bernoulliovu rovnici** pro **obecnou stlačitelnou tekutinu**:

$$\int d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int d\varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst. \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + \varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst.$$

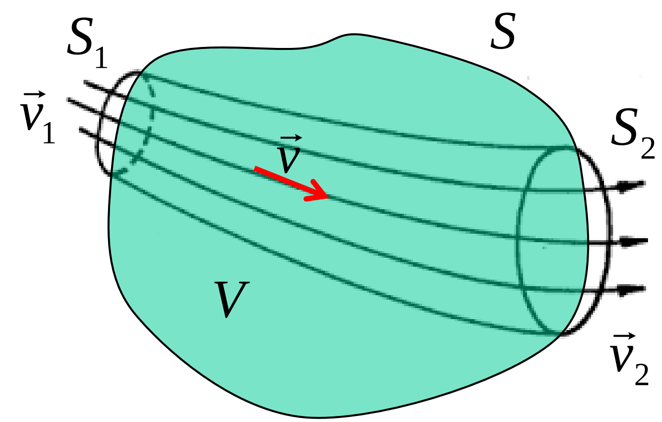
• **Bernoulliovu rovnici** pro **kapalinu**, kdy je hustota konstantní:

$$\rho = konst. \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{v^2}{2} + \rho\varphi + p = konst.$$

• „Součet kinetické energie objemové jednotky kapaliny, její potenciální energie a tlaku je podél proudnice konstantní.“

• Pro libovolná dvě místa na stejné proudnici má tento výraz stejnou hodnotu:

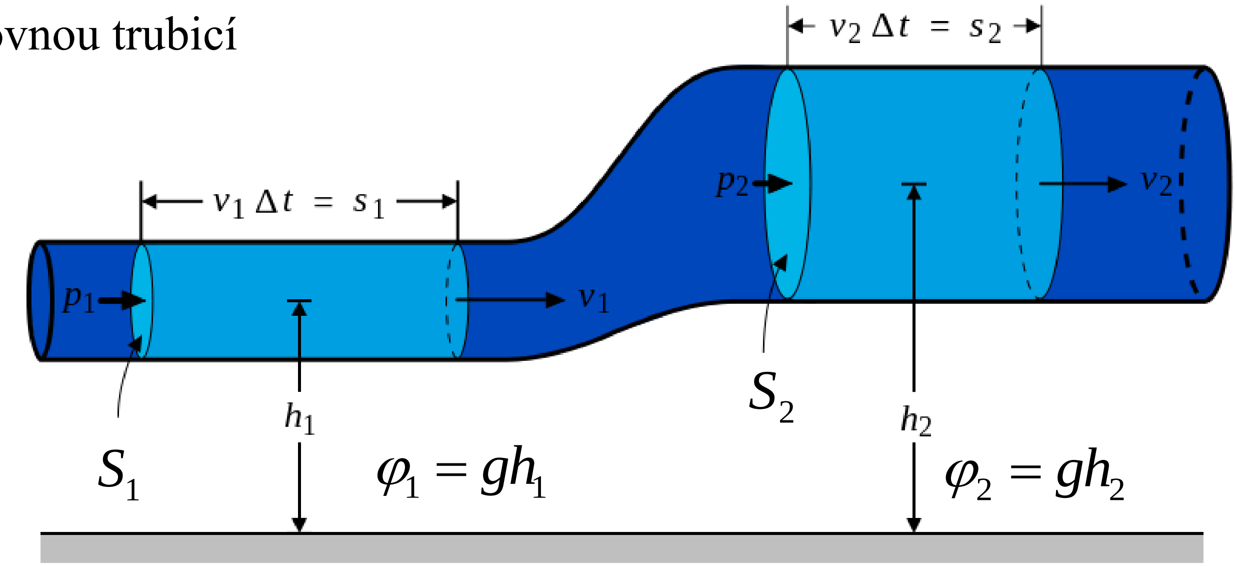
$$\frac{v_1^2}{2} + \varphi_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \varphi_2 + \frac{p_2}{\rho}$$



Mechanika tekutin – Proudění, Hydrodynamika – Bernoulliova rovnice

- Příklad proudění kapaliny vodorovnou trubicí
- ideální (nestlačitelná) kapalina

$$\rho = konst.$$



- kdyby kapalina stála

$$v_1 = v_2 = 0$$

$$\rho\varphi_1 + p_1 = \rho\varphi_2 + p_2 \Rightarrow$$
$$p_2 - p_1 = \rho\varphi_2 - \rho\varphi_1 = \rho g \left(h_2 - h_1\right)$$

- **Bernoulliova rovnice:** $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 = konst.$

- Rovnice kontinuity: $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{V_1}{\Delta t} = \frac{V_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 = konst.$